Exemple 1 de sujet zéro

Sujet majeur

(30 minutes de préparation, 19 minutes d'exposé au maximum)

On considère l'équation différentielle (E) sur $\mathbf{R}$ suivante.

$$(E)\colon y''(x) = (1+x)y'(x) + y(x)$$

1. On note h l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{x+\frac{x^2}{2}}$. Vérifier que h est une solution de (E).
2. Soit f une solution de (E) telle que $f(0) = f'(0) = 1$.

   On suppose qu'il existe un réel $r > 0$ tel pour tout $x \in]-r\,;r[$, on a : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où les a_i sont des réels.
   Déterminer a_0, a_1 et montrer que, pour tout entier naturel n,

   $$(n+2)a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n,

   $$0 \leqslant a_n \leqslant 1.$$

   (b) En déduire que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est différent de 0.

   (c) On admet que l'équation différentielle (E) a une unique solution y telle que $y(0) = y'(0) = 1$. Déterminer alors l'expression de f à l'aide de fonctions usuelles sur l'intervalle $]-R\,; R[$.
4. Pour tout entier naturel non nul n, on note I_n le nombre de permutations σ de $E = \{1, \ldots, n\}$ telles que $\sigma^2 = \mathrm{Id}_E$.

   (a) Calculer I_1 et I_2, puis démontrer que, pour tout entier naturel non nul n,

   $$I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n.$$

   (b) Pour tout entier naturel non nul n, exprimer I_n en fonction de a_n.

Sujet secondaire

(sans préparation)

Soit p un réel dans $]0\,;1[$ et n un entier naturel non nul. On note A et B deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$, indépendantes, qui suivent la même loi binomiale de paramètres n et p.
Pour tout ω dans Ω, on pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} A(\omega) & B(\omega) \\ A(\omega) & B(\omega) \end{pmatrix}$.

1. Quelle est la probabilité que $M(\omega)$ est inversible ?
2. (a) On rappelle (et on admet) que la variable aléatoire $A+B$ suit la loi binomiale de paramètres $2n$ et p.
   Quelle est la probabilité que $M(\omega)$ est la matrice d'un projecteur non nul ?
3. Quelle est la probabilité que $M(\omega)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Corrigé du sujet majeur

1. L'application h est la composée de fonctions usuelles de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donc h est au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a : $h'(x) = (1+x)\mathrm{e}^{x+\frac{x^2}{2}}$ et $h''(x) = \left(1+(1+x)^2\right)\mathrm{e}^{x+\frac{x^2}{2}}$.
   Ainsi, $(1+x)h'(x) + h(x) = (1+x)^2\mathrm{e}^{x+\frac{x^2}{2}} + \mathrm{e}^{x+\frac{x^2}{2}} = h''(x)$.
   Donc h est une solution de (E).
2. La fonction f solution de (E) est supposée développable en série entière au voisinage de 0. Elle est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r\,;\,r[$ et, pour tout réel $x \in]-r\,;\,r[$,
   $$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$$
   et
   $$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)n a_{n+1}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$
   Ainsi, $a_0 = f(0) = 1$, $a_1 = f'(0) = 1$ et, pour tout réel $x \in]-r\,;\,r[$,
   $$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$
   ou encore
   $$2a_2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = a_1 + a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n\right)x^n.$$
   Donc, par unicité de l'écriture d'un développement en série entière au voisinage de 0, on obtient
   $$\begin{aligned}&2a_2 = a_1 + a_0\\ &\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} = (n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n\end{aligned}$$
   Donc, pour tout entier naturel n, on a : $(n+2)a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
3. (a) En procédant par récurrence double, d'une part, $0 \leqslant a_0 \leqslant 1$ et $0 \leqslant a_1 \leqslant 1$.
   D'autre part, soit n un entier naturel tel que $0 \leqslant a_n \leqslant 1$ et $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant 1$. Alors $0 \leqslant a_{n+1} + a_n \leqslant 2$.
   Donc $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}+a_n}{n+2}$ appartient à $[0\,;\,1]$.
   On a montré par récurrence double que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant a_n \leqslant 1$.
   (b) D'après la question précédente, pour tout réel $x \in]-1\,;\,1[$, on a : $0 \leqslant a_n|x|^n \leqslant |x|^n$.
   On sait que le rayon de convergence de la série entière $\sum x^n$ est égal à 1. Donc, par comparaison, la série entière $\sum a_n x^n$ est absolument convergente pour tout réel x tel que $-1 < x < 1$.
   Donc le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est au moins égal à 1.
   Donc R est en particulier différent de 0.
   (c) D'après ce qui est admis, il suffit de vérifier que $h(0)$ et que $h'(0) = 1$, ce qui est le cas.
   Donc, pour tout $x \in]-R\,;\,R[$, on a $f(x) = h(x) = \mathrm{e}^{x+\frac{x^2}{2}}$.
4. (a) L'ensemble $\{1\}$ ne possède qu'une seule permutation, c'est-à-dire $\mathrm{Id}_{\{1\}}$ et $\mathrm{Id}_{\{1\}} \circ \mathrm{Id}_{\{1\}} = \mathrm{Id}_{\{1\}}$. Donc $I_1 = 1$.
   L'ensemble $\{1,\,2\}$ possède exactement deux permutations : $\left(\begin{smallmatrix}1&2\\1&2\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix}1&2\\2&1\end{smallmatrix}\right)$. Ces deux permutations sont des involutions de $\{1,\,2\}$ donc $I_2 = 2$.
   Soit n un entier naturel non nul et I_{n+2} le nombre de permutations de $E = \{1,\,\ldots,\,n+2\}$ telles que $\sigma^2 = \mathrm{Id}_E$.
   Le nombre de permutations de E qui laissent fixe $n+2$ et qui sont des involutions de E est égal à I_{n+1}.
   Il reste à dénombrer les permutations σ de E telles que $\sigma^2 = \mathrm{Id}_E$ et telles que $\sigma(n+2) = k$, avec k entier vérifiant : $1 \leqslant k \leqslant n+1$.
   Soit σ une telle permutation. Puisque $\sigma = \sigma^{-1}$, on peut dire que $\sigma(k) = n+2$. Pour chaque telle permutation (il y en a autant que de choix d'entier k, c'est-à-dire $n+1$), on a à la fois $\sigma(k) = n+2$

et $\sigma(n+2)=k$. Cette permutation σ réalise d'autre part une bijection sur l'ensemble constitué des n autres éléments de E (différents de k et de $n+2$). Elle vérifie aussi $\sigma^2=\sigma$ sur cet ensemble.

Il y a donc au total $(n+1)I_n$ permutations σ de E telles que $\sigma^2=\sigma$ et telles que $\sigma(n+2)=k$, avec k entier tel que $1\leqslant k\leqslant n+1$.

Donc $I_{n+2}=I_{n+1}+(n+1)I_n$.

(b) Pour tout entier naturel non nul n,

$$(n+2)\frac{I_{n+2}}{(n+2)\,!}=\frac{I_{n+1}}{(n+1)\,!}+\frac{I_n}{n\,!}.$$

Donc la suite $\left(\dfrac{I_n}{n\,!}\right)_{n\geqslant 1}$ vérifie la même relation de récurrence que $(a_n)_{n\geqslant 1}$.

De plus, $a_1=1=\dfrac{I_1}{1\,!}$ et $a_2=\dfrac{a_0+a_1}{2}=1=\dfrac{I_2}{2\,!}$.

Donc, pour tout entier $n\geqslant 1$, on a : $I_n=n\,!a_n$.

Corrigé du sujet secondaire

1. La matrice $M(\omega)$ est de rang inférieur ou égal à 1 : la probabilité qu'elle est inversible est donc nulle.
2. La matrice $M(\omega)$ est la matrice d'un projecteur si et seulement si $[M(\omega)]^2=M(\omega)$,

   si et seulement si $\begin{pmatrix} A(\omega)^2+A(\omega)B(\omega) & A(\omega)B(\omega)+B(\omega)^2 \\ A(\omega)^2+A(\omega)B(\omega) & A(\omega)B(\omega)+B(\omega)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A(\omega) & B(\omega) \\ A(\omega) & B(\omega)\end{pmatrix}$,

   si et seulement si $(A(\omega)+B(\omega))\begin{pmatrix} A(\omega) & B(\omega) \\ A(\omega) & B(\omega)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A(\omega) & B(\omega) \\ A(\omega) & B(\omega)\end{pmatrix}$,

   si et seulement si $(A(\omega)+B(\omega)-1)M(\omega)=0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

   Donc $M(\omega)$ est la matrice d'un projecteur non nul si et seulement si $A(\omega)+B(\omega)=1$.

   Il s'agit alors de calculer $\mathbf{P}(A+B=1)$.

   Or, les variables aléatoires A et B étant indépendantes, la variable aléatoire $A+B$ suit la loi binomiale de paramètres $2n$ et p (cette propriété peut être retrouvée par le candidat avec l'aide éventuelle de l'examinateur).

   Donc la probabilité cherchée est égale à $\mathbf{P}(A+B=1)=\begin{pmatrix}1\\2n\end{pmatrix}p(1-p)^{2n-1}=2np(1-p)^{2n-1}$.
3. On remarque que $A(\omega)+B(\omega)$ est une valeur propre pour la matrice $M(\omega)$ car $M(\omega)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=(A(\omega)+B(\omega))\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

   De plus, $M(\omega)$ n'étant pas inversible, 0 est aussi valeur propre de $M(\omega)$.

   Dans le cas où $A(\omega)+B(\omega)\neq 0$, la matrice réelle $M(\omega)$ de taille 2×2 a deux valeurs propres réelles distinctes. Les dimensions respectives des espaces propres associés sont au moins égales à 1 et leur somme est majorée par 2 donc chaque espace propre a pour dimension 1, qui est égale à l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre en tant que racine du polynôme caractéristique de $M(\omega)$. Donc $M(\omega)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

   Dans le cas où $A(\omega)+B(\omega)=0$, les variables aléatoires A et B étant à valeurs positives, on obtient $A(\omega)=B(\omega)=0$. Donc $M(\Omega)$ est la matrice nulle et elle est particulier diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

   Donc la probabilité que $M(\omega)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ est égale à 1.

Exemple 2 de sujet zéro

Sujet majeur

(30 minutes de préparation, 19 minutes d'exposé au maximum)

On note E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications continues $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour toute application f dans E, on note $\Phi(f)$ l'application définie par

$$\Phi(f)(0) = f(0)$$
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ \Phi(f)(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Pour toute application f dans E, montrer que si f est impaire, alors, pour tout réel x, $\Phi(f)(x) = 0$.
2. (a) Pour toute application f dans E, démontrer que $\Phi(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty\,;0[$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$, $\Phi(f)'(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)-2\Phi(f)(x)}{2x}$.
   (b) Déterminer toutes les applications f dans E telles que $\Phi(f)$ est l'application nulle.
3. Montrer que, pour toute application f dans E, l'application $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
5. (a) Vérifier que $f \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ si et seulement si f est impaire.
   (b) Soit λ un réel quelconque.
   Déterminer, suivant les valeurs du réel λ, les applications f dans E telles que $\Phi(f) = \lambda f$. *On montrera qu'une telle application f est solution d'une équation différentielle du premier ordre, qu'on résoudra sur $]-\infty\,;0[$ ou sur $]0\,;+\infty[$.*
   Quelles sont les valeurs propres de l'endomorphisme Φ ?

Sujet secondaire

(sans préparation)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\theta \neq k\pi$.

1. Factoriser le polynôme $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et déduire que l'équation $x^2 - 2\cos(\theta)x + 1 = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $]-1\,;1[$.

Pour tout réel $x \in]-1;1[$, on pose $g(x) = \dfrac{1-x^2}{1-2\cos(\theta)x + x^2}$.

2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}$ l'expression de g.
3. Montrer que, pour tout réel $x \in]-1\,;1[$, on a :

$$g(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\cos(n\theta)x^n.$$

Corrigé du sujet majeur

1. Soit f dans E.
D'une part, $\Phi(f)(0) = f(0) = 0$ car f est impaire.
D'autre part, pour tout réel $x \neq 0$, $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{x}^{0} f(-u)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$
Donc, pour tout réel $x \neq 0$, $\Phi(f)(x) = \dfrac{1}{2x} \times 0 = 0$.

2. (a) Notons F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Alors, pour tout réel $x \neq 0$, $\Phi(f)(x) = \dfrac{F(x) - F(-x)}{2x}$ donc $\Phi(f)$ est le quotient d'applications de classe $\mathscr{C}^1$ sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, avec un dénominateur qui ne s'annule pas sur ces intervalles. Donc Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et de de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$.
De plus, pour tout réel $x \neq 0$, $\Phi(f)'(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2x} - \dfrac{F(x) - F(-x)}{2x^2} = \dfrac{f(x) + f(-x) - 2\Phi(f)(x)}{2x}$.
(b) D'après la question 1, si f est impaire, alors $\Phi(f)$ est l'application nulle.
Réciproquement, soit f dans E telle que $\Phi(f)$ est l'application nulle.
Alors, pour tout réel $x \neq 0$, $\Phi(f)'(x) = 0$. D'après la question précédente, on obtient $f(-x) = -f(x)$.
De plus, f est continue en 0 donc $f(0) = -f(0)$. Donc f est impaire.
Donc les applications f dans E telles que $\Phi(f)$ est l'application nulle sont les fonctions continues sur $\mathbf{R}$ et impaires.

3. Soit f dans E. On sait que $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ d'après la question 2a. Il reste à montrer que $\Phi(f)$ est continue en 0. Notons F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel $x \neq 0$, $\Phi(f)(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{F(-x) - F(0)}{x - 0}$. Or, les applications F et $x \longmapsto F(-x)$ sont dérivables en 0, de nombres dérivés en 0 respectifs $f(0)$ et $-f(0)$.
Donc $\Phi(f)(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers 0 et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \Phi(f)(x) = \frac{1}{2} \times f(0) - \frac{1}{2} \times (-f(0)) = f(0)$.
Donc $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

4. Il s'agit de montrer que Φ est une application linéaire définie sur l'espace vectoriel E et à valeurs dans l'espace vectoriel E.
On vient de montrer que, pour tout f dans E, $\Phi(f)$ est dans E.
De plus, pour tout f dans E, pour tout g dans E et pour tout réel α, l'application $f + \alpha g$ appartient à l'espace vectoriel E.
Par ailleurs, $\Phi(f + \alpha g)(0) = (f + \alpha g)(0) = f(0) + \alpha g(0) = \Phi(f)(0) + \alpha \Phi(g)(0)$.
Enfin, pour tout réel $x \neq 0$,
$$\Phi(f + \alpha g)(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} (f + \alpha g)(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \alpha \times \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(f)(x) + \alpha \Phi(g)(x).$$
Donc Φ est linéaire de E dans E, c'est-à-dire : Φ est un endomorphisme de E.

5. (a) Soit f dans E.
$f \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ si et seulement si $\Phi(f) = 0_E$, si et seulement si f est impaire, d'après la question 2b.
(b) Si $\lambda = 0$, les applications f dans E sont exactement les applications qui appartiennent au noyau de Φ, c'est-à-dire les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et impaires.
Donc 0 est une valeur propre de Φ car, par exemple, la fonction $x \longmapsto x$ est impaire, non nulle, et continue sur $\mathbb{R}$.
Soit maintenant un réel $\lambda \neq 0$ et f dans E, non nulle, telle que $\Phi(f) = \lambda f$. On remarque que $\Phi(f)$ est une application paire donc f aussi.
De plus, $\Phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout réel $x \neq 0$,
$$2x\Phi(f)'(x) = f(x) + f(-x) - 2\Phi(f)(x).$$
Donc
$$2\lambda x f'(x) = 2f(x) - 2\lambda f(x).$$
Donc f est une solution sur $]-\infty\,; 0[$ (ou sur $]0\,; +\infty[$) de l'équation différentielle du premier ordre $\lambda x y' = (1 - \lambda) y$.

Les solutions de cette équation sur $]0\,;+\infty[$ sont les fonctions $x \longmapsto A\mathrm{e}^{\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln(x)} = Ax^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ et les solutions de cette équation sur $]-\infty\,;0[$ sont les fonctions $x \longmapsto B\mathrm{e}^{\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln(-x)} = B(-x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$, avec A et B réels.
Donc f a pour expression sur $\mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} Ax^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \\ B(-x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} & \text{si } x < 0 \end{cases}, \text{ avec } A \text{ et } B \text{ des réels.}$$

Puisque f est continue en 0, on a nécessairement $\lim\limits_{x\to 0^+} Ax^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = \lim\limits_{x\to 0^-} B(-x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = f(0)$.
Donc $\dfrac{1-\lambda}{\lambda} \geqslant 0$, soit $\lambda \in]0\,;1]$.
Enfin, la parité de f permet d'affirmer que $B = A$.
Donc, pour tout réel x, $f(x) = A|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$.
Réciproquement, toute application f de cette forme est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\Phi(f) = \lambda f$.
Ainsi, pour tout $\lambda \in]0\,;1]$, l'espace propre associé à λ est $\mathrm{Vect}\left(x \longmapsto |x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\right)$ et,
pour $\lambda \notin [0\,;1]$, $\mathrm{Ker}(\Phi - \lambda \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.
Les valeurs propres de Φ sont donc les réels de l'intervalle $[0\,;1]$.

Corrigé du sujet secondaire

1. On a : $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 = \left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)$.
   Pour tout complexe z, on a : $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0 \iff \left(z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(z - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) = 0$.
   Or, par hypothèse sur θ, les nombres complexes $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ n'appartiennent pas à $\mathbf{R}$, donc l'équation $x^2 + 2\cos(\theta)x + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbf{R}$, donc en particulier n'a pas de solution dans $]-1\,;1[$.
2. Il existe deux complexes A et B tels que, pour tout complexe z différent de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et différent de $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$,

$$\frac{1-z^2}{\left(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(z-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)} = -1 + \frac{A}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} + \frac{B}{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}.$$

   Puisque la fonction g est de variable réelle et à valeurs réelles, on peut affirmer que $B = \overline{A}$.
   De plus, pour tout $z \neq \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$,

$$\frac{1-z^2}{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}} = -(z-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) + A + \frac{B(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}.$$

   D'où $A = \dfrac{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
   Donc, pour tout complexe $z \notin \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right\}$,

$$\frac{1-z^2}{1-2\cos(\theta)z+z^2} = -1 - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}.$$

3. Pour tout complexe u tel que $|u| < 1$, on sait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n = \frac{1}{1-u}$.
   On rappelle que $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| = \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right| = 1$.
   Ainsi, pour tout complexe z tel que $|z| < 1$,

$$\frac{1-z^2}{1-2\cos(\theta)z+z^2} = -1 + \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}z} + \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z} = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}z^n = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} 2\cos(\theta)z^n.$$

   En particulier, pour tout réel $x \in]-1\,;1[$, on obtient :

$$g(x) = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} 2\cos(n\theta)x^n = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\theta)x^n.$$